

La sucesión de partes fraccionales de $n^k\alpha$

0: Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$. ¿Qué se puede decir de la sucesión $\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^\infty$? ¿Es densa? Equidistribuida? Demostrá tus repuestas.

1: En los próximos días vamos a demostrar unos teoremas:

Theorem 0.1. *Sea α irracional. Entonces la sucesión $\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^\infty$ es equidistribuida módulo 1.*

Theorem 0.2. *Sea α irracional. Entonces la sucesión $\{\{n^2\alpha\}\}_{n=1}^\infty$ es equidistribuida módulo 1.*

Hacé un dibujo que muestra estos teoremas.

2: ¿Para cuales polinomios $f(n)$ sabemos $\{\{f(n)\}\}_{n=1}^\infty$ también es equidistribuida? Hacé un dibujo que muestra tu conjetura.

3: Los teoremas de arriba dicen que esas dos sucesiones son densas. Hacé un dibujo que muestra esto.

4: Hacemos una definición:

Definition 0.3. *Dado un sucesión de números $\alpha_n \in [0, 1)$, fijá un entero N y ordená los $\alpha_n (n \leq N)$ para que sea creciente. Entonces escribimos $\beta_n (n \leq N)$ para esta sucesión creciente (la sucesión depende de N). También continuamos nuestra sucesión periódicamente: $\beta_j = \beta_{j+N} \forall j$. Ahora si*

$$\|x - y\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - y - n|$$

tenemos

- los espacios de vecinos más próximos son los números $\|\beta_{j+1} - \beta_j\|$ para $j = 1, \dots, N$
- los espacios de vecinos m -próximos son los números $\|\beta_{j+m} - \beta_j\|$ para $j = 1, \dots, N$

Sea $\alpha = \sqrt{2}$. Describe lo que pasa con pasa con estos espacios para la sucesión $\alpha_n = \{n\alpha\}$ y $\alpha_n = \{n^2\alpha\}$ para $N = 10$ y $N = 20$. ¿Qué pasa para otros α ?

5: Sea δ la función δ de Dirac (la función $\delta(x)$ tal que $\int f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$). Dado "point masses" x_1, \dots, x_N tenemos una distribución de probabilidad

$$\mu_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) dx.$$

Demostrar que esto es, en actualidad, una distribución. Y, además, demostrar $\int f(x)\mu_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n)$ (típicamente, para nosotros, los x_n son los espacios).

6: Para α, N, m definimos la distribución

$$\mu_{m,N,\alpha}(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x - N(\beta_n - \beta_{n-m})) dt.$$

Conjecture 0.4. *La sucesión de partes fraccionales de $n^k \alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$) tiene comportamiento Poisson. Es decir,*

$$\mu_{m,N,\alpha}(x) dx \rightarrow \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{-x} dx \text{ con } N \rightarrow \infty.$$

¿Qué pasa cuando $k = 1$? ¿ $k = 2$? Hací un dibujo en cada caso.