Primeros Ejercicios Experimentales
Los números Fibonacci y los números primos

En estos problemas, cuando necesario, sugiero que usan al Sage. El servidor de Sage es

`https://sage.cmat.edu.uy:8000`

Entrega 9/4/09.

1. Investigar $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ y anotar una fórmula para esa suma. Dar prueba de la fórmula.

2. Dar prueba de $gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$.

3. Dar prueba de $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$.

4. ¿Si $m|n$, qué se puede decir de F_m y F_n? Dar prueba de su conjetura.

5. Formular una conjetura sobre la $gcd(F_n, F_m)$ en términos de unos F_a.

a. Aceptando tu conjetura, dar una prueba de si F_n es un número primo, entonces n es un número primo

b. Dar un contraejemplo al converso de parte a.

c. Dar una prueba de la conjetura.

6. Dar prueba de que los pares de números Fibonacci consecutivos son pares (x, y) de números enteros que satisfacen la ecuación $y^2 - yx - x^2 = \pm 1$. Es un problem mas difícil dar prueba al converso.

7. Dejar que $\pi_3(x) = \#\{p < x : p \text{ primo y } p \equiv 3 \pmod 4\}$ y $\pi_1(x) = \#\{p < x : p \text{ primo y } p \equiv 1 \pmod 4\}$. Buscar los x menos de 3.000.000 donde $\pi_3(x) - \pi_1(x)$ cambia de signo.

8. Usando el método de Euclid se puede demostrar que hay una infidad de primos p congruente a 3 módulo 4. ¿A cuáles otros módulos y clases se pueden generalizar esa manera de demostración? Dar prueba a su repuesta.